

На правах рукописи

МОНАХОВА ОКСАНА АЛЕКСАНДРОВНА

**ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
РАССЛОЕНИЯ ДВАЖДЫ КОВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРОВ
СО СВЯЗНОСТЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА**

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2005

Работа выполнена на кафедре алгебры Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, профессор Султанов Адгам Яхиевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор Шапуков Борис Никитович,
кандидат физико-математических наук, доцент Беляев Павел Леонидович

Ведущая организация: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Защита состоится 16 июня 2005 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете (420008, г. Казань, улица Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 217)

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского государственного университета (г. Казань, улица Кремлевская, 18)

Автореферат разослан « » мая 2005 года

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент



М.А. Малахальцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория расслоенных пространств – одна из наиболее быстро развивающихся областей в современной математике, которая в настоящее время активно исследуется. Теория расслоений возникла на стыке геометрии, анализа, теории дифференциальных уравнений, теории групп и других разделов математики и механики.

Первые результаты по теории касательных расслоений принадлежат японским математикам: Сасаки, [14], Яно, Ишихара, [16]. Наряду с касательными расслоениями с конца 60-х годов прошлого века началось изучение двойственных им кокасательных расслоений, к числу первых можно отнести работы Яно, [15], Мока, [12]. В указанных работах авторы рассматривали теорию продолжения тензорных полей и аффинных связностей из дифференцируемого многообразия в его касательное и кокасательное расслоение. В известной работе Яно и Ишихара [17] подведены итоги развития геометрии касательных и кокасательных расслоений до 1973 года.

Вопросами построения и изучения связностей на векторных расслоениях занимался Б.Н. Шапуков [7]. Им показано, что если на векторном расслоении задана внешняя связность, то при некоторых условиях в расслоении определяется, некоторая внутренняя связность, в общем случае нелинейная.

При изучении векторных расслоений особое внимание Б.Н. Шапуковым уделено тензорным расслоениям, поскольку здесь появляются специфические структуры [5], [6]. Обзор результатов по дифференциальной геометрии тензорных расслоений изложен Б.Н. Шапуковым в работе [10].

Одним из способов получения внешней связности на расслоении является поднятие базовых связностей в расслоенное пространство. Общая теория лифтов тензорных полей и аффинных связностей с дифференцируемого многообразия в его касательное расслоение была разработана К. Яно, А. Леджером, Ш. Кобаяси, Ш. Ишихарой.

Неоднократно, с различных точек зрения рассматривался полный лифт линейной связности на касательных расслоениях различного порядка, [2]. На расслоении линейных реперов он был построен в работе Мока [13], на тензорных расслоениях полный лифт построен Б.Н. Шапуковым в работе [8]. Проблему построения полного лифта в аффинорное расслоение рассматривал П.Л. Беляев в [1].

Горизонтальный лифт линейной связности, заданной на базе, в касательное и кокасательное расслоение построен в работе [17] К. Яно и Ш. Ишихара, в тензорном расслоении произвольного типа (p, q) горизонтальная связность изучена Б.Н. Шапуковым в работе [9].

В работе [11] изучаются обобщения расслоения аффиноров – тензорные расслоения типа $(1, q)$, определяется диагональный лифт римановой метрики с базы в это расслоение.

Большое значение для изучения геометрии расслоенных пространств имеет вопрос об инфинитезимальных преобразованиях связностей в этих пространствах. Он достаточно подробно изучен для касательных расслоений, [17]. И.П. Егоров изучал преобразования в пространствах аффинной связности, а также в различных обобщениях пространств аффинной связности, [3]. Для тензорных расслоений этот вопрос мало изучен. Исходя из выше изложенного, тема настоящей диссертационной работы актуальна.

Целью представленной работы является изучение инфинитезимальных аффинных преобразований расслоения дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта.

Методы исследования. Исследования проводятся в основном локально, с использованием аппарата тензорного анализа. Функции, тензорные поля предполагаются гладкими класса C^∞ .

Теоретическое значение. Работа носит теоретический характер, является продолжением изучения тензорных расслоений типа $(0, 2)$ и инфинитезимальных аффинных преобразований этих расслоений. Результаты дис-

сертации могут быть использованы для дальнейшего развития теории тензорных расслоений.

Апробация работы. По теме диссертации опубликовано 12 работ. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на геометрических семинарах в Пензенском государственном педагогическом университете им. В.Г. Белинского (2000 – 2004 гг.), на IX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 9 – 12 апреля 2002 года), на Всероссийской молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, КГУ, 1 – 4 декабря 2003 года), на Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, КГУ, 26 сентября – 1 октября 2004 года).

Научная новизна и основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

1. Построены лифты с дифференцируемого многообразия в его расслоение дважды ковариантных тензоров, изучены свойства построенных лифтов. Вычислены коммутаторы различных типов векторных полей, полученных на расслоении с помощью этих лифтов.
2. Построена связность на расслоении с помощью горизонтального поднятия линейной связности, заданной на базе, горизонтальное поднятие осуществляется с помощью некоторой другой связности, заданной на этом же многообразии. Изучены свойства поднятой связности и операции ковариантного дифференцирования, определяемой горизонтальным лифтом связности на расслоении.
3. Получено разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$. Найдены необходимые и достаточные условия существования этого разложения.
4. Изучены инфинитезимальные аффинные преобразования пространства $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$ над максимально подвижным не проективно плоским пространством (M_n, ∇) . Показано, что все слагаемые, входящие в раз-

ложение инфинитезимального аффинного преобразования существенны.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 107 страницах и состоит из введения, трех глав, содержащих 20 параграфов и библиографического списка.

Краткое содержание диссертации

Введение содержит краткий обзор по теории расслоенных пространств, обоснование темы диссертации, краткое содержание работы.

В первой главе строятся продолжения тензорных полей с гладкого многообразия на его расслоение дважды ковариантных тензоров. В §1 дается определение тензорного расслоения типа $(0,2)$, вводится структура гладкого многообразия на нем, индуцированная гладкой структурой на базе. В §2 определяются γ -лифты тензорных полей типа $(2,0)$ с базы в расслоение $T_2^0(M_n)$. Функции γT , полученные поднятием тензорных полей T типа $(2,0)$, позволяют в дальнейшем построить продолжения других тензорных полей с базы в расслоенное пространство. Эти построения основаны на теореме 1.5.

Теорема 1.5. Пусть \tilde{Z} непрерывное векторное поле на $T_2^0(M_n)$. Если $\tilde{Z}(\gamma T) = 0$ для $\forall T \in \mathfrak{T}_0^2(M_n)$, то $\tilde{Z} = 0$.

В третьем параграфе определяются вертикальные лифты тензорных полей типа $(0,2)$, доказывается, что построенный лифт является полулинейным гомоморфизмом модуля тензорных полей типа $(0,2)$ на базе в модуль векторных полей на расслоенном пространстве относительно вертикальных лифтов функций. В §4 предлагается бескоординатный способ введения полного лифта векторного поля с базы в расслоенное пространство, определенного Б.Н. Шапуковым в [4]. Изучаются некоторые свойства полного лифта, необходимые для изучения инфинитезимальных преобразований. В §5 рассматриваются естественные продолжения диффеоморфизмов

базы, и предлагается еще один подход к построению полных лифтов векторных полей. В шестом параграфе даются определения специальных вертикальных лифтов тензорных полей типа $(1,1)$, возникающих при изучении инфинитезимальных преобразований на расслоении. Изучаются свойства специальных вертикальных лифтов. Вычисляются коммутаторы различных типов векторных полей на расслоенном пространстве. В §7 определяются специальные лифты тензорных полей типа $(3,1)$, возникающих при изучении инфинитезимальных преобразований, изучаются их свойства. В частности, показывается, что эти лифты можно получить как тензорное произведение специальных вертикальных и γ -лифтов. В §8 предлагается бескоординатный способ введения горизонтального лифта векторного поля с базы в расслоенное пространство, определенного Б.Н. Шапуковым в [4]. Изучаются свойства горизонтального лифта векторных полей, необходимые для изучения инфинитезимальных преобразований связности на расслоенном пространстве. В девятом параграфе выясняется связь между полным и горизонтальным лифтом векторного поля. В §10 строится адаптированный к связности репер и корепер на расслоении. Вычисляются компоненты объекта неголономности. Приводятся законы преобразования адаптированного репера. В §11 определяется специальный вертикальный лифт тензорных полей типа $(2,2)$, возникающий при изучении инфинитезимальных преобразований, рассматриваются свойства этого лифта. В §12 вводится специальный горизонтальный лифт тензорных полей типа $(3,0)$, изучаются его свойства этого лифта. В §13 строится вертикальный лифт линейных форм с базы в расслоенное пространство $T_2^0(M_n)$.

Вторая глава посвящена изучению горизонтального продолжения линейной связности с базы на расслоение $T_2^0(M_n)$. В §1 определяется горизонтальный лифт линейной связности, поднятие осуществляется с помощью некоторой другой линейной связности, заданной на базе. Доказывается, что построенный лифт является линейной связностью на расслоении. Вычисляются значения тензорных полей кривизны и кручения по-

строенной связности на полях адаптированного репера. Во втором параграфе изучаются свойства операции ковариантного дифференцирования, определяемой горизонтальным лифтом связности, рассматривается частный случай, когда поднятие линейной связности осуществлено с помощью самой этой связности. В §3 приводится определение проектируемых векторных полей и связностей на расслоенных пространствах в смысле Б.Н. Шапукова, [7]. Показывается проектируемость полных, горизонтальных векторных полей, а также связности горизонтального лифта на $T_2^0(M_n)$. В §4 доказано, что пространство $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$ является пространством рекуррентной кривизны тогда и только тогда, когда база расслоения – пространство рекуррентной кривизны связности ∇ .

В третьей главе изучаются инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$. В §1 получено разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования и найдены необходимые и достаточные условия существования этого разложения. Во втором параграфе найдено другое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования расслоения $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$ и условия существования этого разложения. Особенностью этого разложения является то, что каждое слагаемое в нем самостоятельно является инфинитезимальным аффинным преобразованием. В §3 изучаются инфинитезимальные аффинные преобразования пространства $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$ над максимально подвижным не проективно плоским пространством (M_n, ∇) . Показывается, что в разложении инфинитезимального аффинного преобразования этого пространства присутствует каждое слагаемое. Доказано

Предложение 3.5. Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований расслоения дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта над максимально подвижным не проективно плоским пространством аффинной связности размерности n равна $n^4 - 2n^3 + 8n^2 - 16n + 18$.

Таким образом, все слагаемые, входящие в разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования расслоения $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$, существенны.

Публикации автора по теме диссертации.

1. Монахова О.А. Тензорное расслоение типа $(0,2)$ / О.А. Монахова // Международная школа-семинар по геометрии и анализу, посвященная 90-летию Н.В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, база отдыха Ростовского государственного университета "Лиманчик", 5-11 сентября 2000 г.: тез. докл. – Ростов-на-Дону, 2000. – С. 55–56.
2. Монахова О.А. О некоторых лифтах на тензорном расслоении типа $(0,2)$ / О.А. Монахова // Тр. Мат. Центра им. Н. И. Лобачевского. Том 5. Актуальные проблемы математики и механики // Материалы Международной науч. конф. – Казань: УНИПРЕСС, 2000. – С. 153–154.
3. Монахова О.А. Вертикальные лифты тензорных полей типа $(1,1)$ / О.А. Монахова // Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза, 2000. – С. 173–178.
4. Монахова О.А. Об адаптированных реперах и некоторых лифтах в расслоении дважды ковариантных тензоров / О.А. Монахова // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград: Изд-во КГУ, 2002. – Вып. 33. – С. 72–74.
5. Монахова О.А. Продолжения тензорных полей с гладкого многообразия в его расслоение дважды ковариантных тензоров / О.А. Монахова // Материалы Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" – М.: Изд-во МГУ, 2002. – Вып. 7. – С. 365.
6. Монахова О.А. Горизонтальный лифт связности в расслоении дважды ковариантных тензоров / О.А. Монахова // Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза, 2002. – С. 168–72.

7. Монахова О.А. Об адаптированных реперах на расслоении дважды ковариантных тензоров / О.А. Монахова // Вестник молодых ученых ПГПУ им. В.Г. Белинского. В 2 ч. Ч. 1. – Пенза, 2002. – С. 71–74.
8. Монахова О.А. Проектируемые связности на расслоении дважды ковариантных тензоров / О.А. Монахова // Вестник молодых ученых ПГПУ им. В.Г. Белинского: сб. науч. ст. – Пенза, 2003. – С. 51–52.
9. Монахова О.А. Об инфинитезимальных аффинных преобразованиях расслоения дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта / О.А. Монахова // Тр. Мат. Центра им. Н. И. Лобачевского. Том 21/ Казанское мат. об-во. Лобачевские чтения 2003 // Материалы третьей всероссийской молодежной науч. школы-конференции. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2003. – С. 169–171.
10. Монахова О.А. О некоторых свойствах горизонтального лифта связности на расслоении дважды ковариантных тензоров / О.А. Монахова // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград: Изд-во КГУ, 2003. – Вып. 34. – С. 95–98.
11. Монахова О.А. Об инфинитезимальных аффинных преобразованиях расслоения $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$ над максимально подвижным не проективно плоским пространством / О.А. Монахова // Тр. Мат. Центра им. Н. И. Лобачевского. Том 25/ Казанское мат. об-во. Актуальные проблемы математики и механики // Материалы Международной научной конференции. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2004. – С. 192–193.
12. Монахова О.А. Естественное продолжение диффеоморфизмов базы в расслоение дважды ковариантных тензоров / О.А. Монахова // Лаптевские чтения: сб. тр. Международного геометрического семинара имени Г.Ф. Лаптева (26 – 31 января 2004 г.) – Пенза, 2004. – С. 80–83.

Библиографический список

1. Беляев П.Л. Аффинорные расслоения: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.04: защищена 22.12.93 / П.Л. Беляев; Казан. Гос. Ун-т. – Казань, 1993. – 107 с.
2. Евтушик Л.Е. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик [и др.] // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНТИ. – М., 1979. – Т. 9. – С. 5–247.
3. Егоров И.П. Движения в пространствах аффинной связности: Ученые записки / И.П. Егоров. – Казань, 1965. – 206 с.
4. Шапуков Б.Н. О структуре тензорного пространства / Б.Н. Шапуков // Труды геометрического семинара. – Казань, 1978. – Вып. 10. – С. 97–106.
5. Шапуков Б.Н. Структура тензорных расслоений, I / Б.Н. Шапуков // Известия вузов. Мат. М., – 1979. – № 5. – С. 63–73.
6. Шапуков Б.Н. Структура тензорных расслоений, II / Б.Н. Шапуков // Известия вузов. Мат. – М., – 1981. – № 9. – С. 56–63.
7. Шапуков Б.Н. Связности на дифференцируемых расслоениях / Б.Н. Шапуков // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНТИ. – М., – 1983. – Т. 15. – С. 61–93.
8. Шапуков Б.Н. Лифт связности на тензорных расслоениях / Б.Н. Шапуков // Известия вузов. Мат. – М., – 1986. – № 12. – С. 70–72.
9. Шапуков Б.Н. Структуры на расслоенных многообразиях и вопросы редукции: дисс. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.04 / Б.Н. Шапуков. – Казань, 1990. – 283 с.
10. Шапуков Б.Н. Тензорные расслоения. / Б.Н. Шапуков // Памяти Лобачевского посвящается. – Изд-во КГУ, 1992. – Вып. I. – С. 104–125.
11. Cengiz N. Diagonal lift in the tensor bundle and its applications / N. Cengiz, A.A. Salimov // Appl. Math. Computation. – 142 (2003). – P. 309–319.

12. Mok K. Metrics and connections on the cotangent bundle / K. Mok // Kodai Math. Sem. Rep. – 1977. – V. 28. – P. 226–238.
13. Mok K. Complete lifts of tensor fields and connections to the frame bundle / K. Mok // Proc. London Math. Soc. – 1979. – V. 38. – № 1. – P. 72–88.
14. Sasaki Sh. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds / Sh. Sasaki // Tohoku Math. J. – 1958. – № 3. – P. 338–354.
15. Yano K. Horizontal lift from a manifold to its cotangent bundle / K. Yano, E.M. Patterson // Jour. Math. Soc. Japan. – 1967. – V. 19. – P. 91–113.
16. Yano K. Fibred spaces and projectable tensor fields / K. Yano, Sh. Ishihara // Perspectives geometry and relativity. – Bloomington – London: Indiana Univ. Press, 1966. (PЖMat, 1968, 5A617).
17. Yano K. Tangent and cotangent bundles / K. Yano, Sh. Ishihara // Differential geometry. – New York, 1973. – 423 p.